

01.16 Πολλαπλάσια ενός αριθμού - Ε.Κ.Π.

Ορισμοί : Πολλαπλάσια - Κοινά Πολλαπλάσια - Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.)

Πολλαπλάσιο ενός αριθμού είναι ο αριθμός που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε αυτόν τον αριθμό με οποιονδήποτε άλλον.

Π.χ. Να βρούμε πολλαπλάσια του αριθμού 8

$$8 * 1 = 8 \quad 8 * 2 = 16 \quad 8 * 3 = 24 \quad 8 * 4 = 32 \quad 8 * 5 = 40$$

Οι αριθμοί 8, 16, 24, 32 και 40 είναι μερικά από τα πολλαπλάσια του αριθμού 8.

Αφού μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε έναν αριθμό με άπειρους άλλους αριθμούς, κάθε αριθμός έχει **άπειρα πολλαπλάσια**.

Κοινά πολλαπλάσια δύο (ή περισσότερων αριθμών) **λέγονται οι αριθμοί που είναι πολλαπλάσια και για τους δύο αριθμούς.**

Π.χ. Πολλαπλάσια του $\Pi_4 = \{ 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 68, \dots \}$

Πολλαπλάσια του $\Pi_6 = \{ 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, \dots \}$

Από τα παραπάνω παρατηρούμε ότι οι αριθμοί 12, 24, 36, 48, 60 είναι πολλαπλάσια και του 4 και του 6. Αυτοί οι αριθμοί λέγονται **κοινά πολλαπλάσια του 4 και του 6**.

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) δύο (ή περισσότερων αριθμών) **λέγεται το μικρότερο από τα κοινά πολλαπλάσια των αριθμών αυτών.**

Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. δύο ή περισσότερων αριθμών (1)

Για να βρούμε το Ε.Κ.Π. δύο ή περισσότερων αριθμών :

- Βρίσκουμε τα πολλαπλάσιά τους.
- Σημειώνουμε τα κοινά πολλαπλάσιά τους.

- Το μικρότερο από αυτά είναι το Ε.Κ.Π. των αριθμών αυτών.

Π.χ. Να βρούμε το Ε.Κ.Π. των αριθμών 12, 16

Βρίσκουμε τα πολλαπλάσια του 12 : $\Pi_{12} = \{0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, \dots\}$

Βρίσκουμε τα πολλαπλάσια του 16 : $\Pi_{16} = \{0, 16, 32, 48, 64, 80, 96, 112, 128, \dots\}$

Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί 48 και 96 είναι Κοινά Πολλαπλάσια. Άρα το 48 που είναι το μικρότερο από τα Κοινά Πολλαπλάσια, είναι το Ε.Κ.Π. των αριθμών 12 και 16 και γράφουμε : $\text{Ε.Κ.Π.}_{(12, 16)} = 48$

Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. δύο ή περισσότερων αριθμών (2)

Για να βρούμε το Ε.Κ.Π. δύο ή περισσότερων αριθμών :

- Εξετάζουμε αν ο μεγαλύτερος από τους αριθμούς διαιρείται (ακριβώς) από τους άλλους. Αν διαιρείται, τότε αυτός είναι το Ε.Κ.Π.
- Αν δε διαιρείται απ' όλους τότε τον, διπλασιάζουμε. Αν διαιρείται, τότε αυτός είναι το Ε.Κ.Π.
- Αν δε διαιρείται απ' όλους τότε τον τριπλασιάζουμε τετραπλασιάζουμε κ.λπ.

Π.χ. Να βρεθεί το Ε.Κ.Π. των αριθμών 8, 12, 16

Μεγαλύτερος είναι το 16. Παρατηρούμε ότι δε διαιρείται από τους άλλους δύο. Τον διπλασιάζουμε και εξετάζουμε αν διαιρείται. Δε διαιρείται και από τους δύο και γι' αυτό τον τριπλασιάζουμε. Παρατηρούμε ότι αν τον τριπλασιάσουμε διαιρείται από τους άλλους δύο : $3 \times 16 = 48$ Το 48 διαιρείται ακριβώς και από το 8 και από το 12, άρα αυτό είναι το Ε.Κ.Π. Γράφουμε τότε $\text{Ε.Κ.Π.}_{(8, 12, 16)} = 48$

Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. δύο ή περισσότερων αριθμών (3)

Ένας άλλος τρόπος για να βρούμε το Ε.Κ.Π. δύο ή περισσότερων αριθμών είναι να τους διαιρούμε με τον μικρότερο πρώτο αριθμό που διαιρεί έστω έναν από αυτούς.

Όσοι δε διαιρούνται γράφονται από κάτω όπως και το πηλίκο αυτών που διαιρούνται. Στη συνέχεια διαιρούμε είτε με τον ίδιο αριθμό, αν διαιρεί έστω έναν από τους αριθμούς που έχουμε είτε με τον επόμενο πρώτο αριθμό. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι τα αποτελέσματα κάτω από κάθε αριθμό να είναι 1.

Πολλαπλασιάζουμε τους πρώτους αριθμούς με τους οποίους κάναμε τις διαιρέσεις και το γινόμενο τους είναι το Ε.Κ.Π.

Π.χ. Να βρεθεί το Ε.Κ.Π.(12, 15, 18)

12	15	18		2
6	15	9		2
3	15	9		3
1	5	3		3
1	5	1		5
1	1	1		

$$\text{Ε.Κ.Π. (12,15,18)} = 2 * 2 * 3 * 3 * 5 = 180$$

Ξεκινάμε να διαιρούμε με το 2, επειδή υπάρχουν αριθμοί, οι οποίοι διαιρούνται με αυτό. Κάτω από τον καθένα γράφουμε το πηλίκο της διαίρεσής του με το 2, ενώ κάτω από το 15 που δε διαιρείται με το 2 γράφουμε πάλι 15. Τώρα έχουμε τους αριθμούς 6, 15 και 9.

Υπάρχει αριθμός (το 6) που διαιρείται με το 2, οπότε το ξαναγράφουμε δεξιά της κάθετης και διαιρούμε το 6, ενώ κατεβάζουμε το 15 και το 9. Τώρα έχουμε τους αριθμούς 3, 15 και 9.

Το 2 δεν διαιρεί πλέον κανέναν αριθμό. Επιλέγουμε τον επόμενο πρώτο αριθμό, δηλαδή το 3.

Το 3 διαιρεί το 3, το 15 και το 9. Γράφουμε από κάτω τα πηλικά και συνεχίζουμε με το 3. Τώρα έχουμε τους αριθμούς 1, 5 και 1. Επιλέγουμε τώρα το 5. Όλα τα πηλικά θα γίνουν 1.

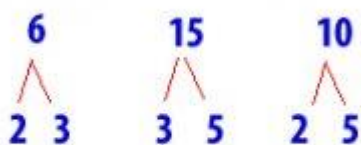
$$\text{Ε.Κ.Π.}_{(12, 15, 18)} = 2 * 2 * 3 * 3 * 5 = 2^2 * 3^2 * 5 = 180$$

Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. δύο ή περισσότερων αριθμών (4)

Ο τελευταίος τρόπος για να βρούμε το Ε.Κ.Π. έχει να κάνει με τα δέντροδιαγράμματα. Αναλύουμε καθέναν από τους αριθμούς, των οποίων θέλουμε να βρούμε το Ε.Κ.Π. Γράφουμε το γινόμενο των πρώτων αριθμών στους οποίους αναλύεται ο πρώτος από αυτούς. Σ' αυτούς πολλαπλασιάζουμε τους πρώτους αριθμούς στους οποίους πολλαπλασιάζεται ο δεύτερος. Δε γράφουμε τους πρώτους αριθμούς που έχουμε ήδη γράψει. Με τον ίδιο τρόπο συνεχίζουμε για τον επόμενο αριθμό. Κάνουμε τις πράξεις και το αποτέλεσμα είναι το Ε.Κ.Π. των αριθμών.

Π.χ. Να βρεθεί το Ε.Κ.Π._(6, 15, 10)

Ε.Κ.Π. (6, 15, 10)



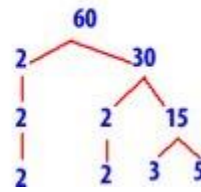
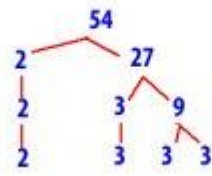
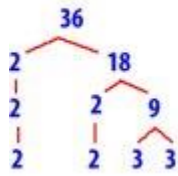
$$\text{Ε.Κ.Π. (6, 15, 10)} = 2 * 3 * 5$$

Αναλύουμε το 6, το 15 και το 10 σε γινόμενα πρώτων παραγόντων. ΕΚΠ είναι το γινόμενο των κοινών και μη κοινών πρώτων παραγόντων.

Γράφουμε το γινόμενο $2 * 3$ που είναι οι πρώτοι παράγοντες στους οποίους αναλύεται το 6. Πάμε να γράψουμε αμέσως μετά τους πρώτους παράγοντες στους οποίους αναλύεται το 15, δηλαδή το 3 και το 5. Το 3 επειδή ήδη το έχουμε γράψει, δεν το ξαναγράφουμε και γράφουμε μόνο το 5. Πάμε να γράψουμε αμέσως μετά τους πρώτους παράγοντες στους οποίους αναλύεται το 10, δηλαδή το 2 και το 5. Και οι δύο παράγοντες έχουν ήδη γραφεί, οπότε δεν τους ξαναγράφουμε. Εδώ τελειώσαμε. $\text{Ε.Κ.Π.}(6, 15, 10) = 2 * 3 * 5 = 30$

Να βρεθεί το Ε.Κ.Π._(36, 54, 60)

Ε.Κ.Π.(36, 54, 60)



Το 36 αναλύεται : $36 = 2^2 * 3^2$

Το 54 αναλύεται : $54 = 2 * 3^3$

Το 60 αναλύεται : $60 = 2^2 * 3 * 5$

Κοινοί παράγοντες είναι το 2 και το 3. **Θα τους πάρουμε μία φορά αλλά με τον μεγαλύτερο εκθέτη** 2^2 και 3^3 . Στο γινόμενο αυτών των αριθμών θα πολλαπλασιάσω και το 5 που είναι **μη κοινός παράγοντας** (επειδή υπάρχει μόνο σε έναν από τους τρεις αριθμούς). Άρα $Ε.Κ.Π.(36, 54, 60) = 2^2 * 3^3 * 5 = 540$